Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
Tanger

Octobre-2011

Exercices facultatifs d'analyse 2 : MIPC

Normes :

Exercice 1 : Soiet a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\|_{(a,b)} = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

a) Montrer que $\|.\|_{(a,b)}$ est une norme de $\mathbb{R}^2$.

b) Faire une représentation de la boule $B((0,0),1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que la norme $\|.\|_{(a,b)}$ et la norme euclidienne $\|.\|_2$ sont équivalentes.

Continutié et différentiabilité :

Exercice 2 :

a) Montrer que l'ensemble $U = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = arcsin\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$$

est différentiable sur U. Calculer sa différentielle $df_{(x,y)}$.

Exercice 3 : Soit f une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2}(\cos^2(x+y) - 1) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

a) Est-ce-que f admet une limite au point $(0,0)$ suivant toutes les directions ?

b) Est-ce-que la fonction f admet une limite au point $(0,0)$?

Exercice 4 : Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \sqrt{2x^4 + y^4}\sin\left(\frac{3y}{x}\right)$$

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Montrer que f est différentiable sur son domaine de définition.

c) Montrer que pour tout (x,y) dans le domaine de f on a
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y)$$

d) Montrer que f est de classe C^2 sur son domaine de définition.

e) Montrer que pour tout (x,y) dans le domaine de f on a
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2f(x,y)$$

Exercice 5 : Soit $p \in I\!N$ et f une fonction de $I\!R^2$ dans $I\!R$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ pour tout $p \in I\!N$.

b) Trouver une condition sur p pour que f soit continue au point $(0,0)$, justifier votre réponse.

c) Pour tout $p \in I\!N$, calculer les dérivées partielles premières de f en tout point $(x,y) \neq (0,0)$, si elles existent.

d) Montrer que f est différentiable en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ pour tout $p \in I\!N$.

e) Calculer les dérivées partielles premières de f au point $(0,0)$ pour $p > 1$

f) Montrer que si $p > 1$ alors f est différentiable au point $(0,0)$.

g) Montrer que si $p = 1$ alors f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.(Utiliser la suite $x_n = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}$)

Exercice 6 : Soit $f : I\!R \to I\!R$ une fonction non paire, de classe C^1 et $g : I\!R^2 \to I\!R$ une fonction définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x-y) - f(y-x)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ 2f'(0) \text{ si } x = y \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $D = \{(x,y)/x \neq y\}$.

b) Montrer que g est continue en tout point de la forme (a,a).
(Appliquer le théorème des accroissement finis à f entre 0 et $h = x - y$ et entre 0 et $h = y - x$)

c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g au point (x,y) avec $x \neq y$.

d) Supposons que f est de classe C^2 sur $I\!R$. Est-ce-que les dérivées partielles d'ordre un de g au point (a,a) existent ?
(Appliquer la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 à f).

e) Si $\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(a,a)$ existent, est ce qu'elles sont continues au point (a,a) ?

Fonctions vectorielles :

Exercice 7 : Soit $F : I\!R^2 \to I\!R^2$ une fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} (\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer, en utilisantune norme convenable, que $\|F(x,y)\| \leq Sup(\|(x,y)\|_2^2, \|x,y\|_2^3)$. En déduit que F est continue sur $I\!R^2$.

a) Calculer la matrice jacobienne de F si elle existe .

b) Est-ce-que f est de classe C^1.

Exercice 8 : Soit $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ une fonction définie par $f(x,y,z) = (x+y^2, xy^2z)$.

a) Montrer que f est différentiable sur $I\!R^3$.

b) Donner la matrice jacobienne de la différentielle de f au point (x,y).

Exercice 9 : Soit la fonction f définie de $I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ par $f(x,y,z) = ((x+y+z)ln(xy)), \frac{x}{y}e^{-z})$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Déterminer la matrice jacobienne en tout point de domaine du définition de f.

Extremums :

Exercice 10 : Soit la fonction f définie sur $I\!R^2$ par $f(x,y) = (x+y)^3 - y^2 - 3(x+y)$

a) Trouver les points stationnaires de f.

b) Trouver les extremums, s'ils existent, de f.

Exercice 11 : Soit f une fonction définie par $f(x,y) = x^3y - xy^3$

a) Trouver les points stationnaires de f.

b) Montre que f n'admet pas d'extremums.

Exercice 12 : Soient $(a_1, a_2, ..., a_n) \in I\!R^n$ tel que les a_i sont distincts deux à deux, $(b_1, b_2, ..., b_n) \in I\!R^n$ et f une fonction définie de $I\!R^2$ dans $I\!R$ par $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(xa_i + y - b_i)^2$

a) Montrer que $n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2$ (Utiliser l'inégalité de Schwarz)

b) Trouver les points stationnaires de f s'ils existent.

c) Est-ce-que f admet des extremums ?

Exercice 1 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_{(a,b)} = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$; $a>0$, $b>0$

a/ • $\|(x,y)\|_{(a,b)}=0 \Leftrightarrow a^2x^2+b^2y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x^2=0 \\ b^2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

• $\alpha\in\mathbb{R} : \|\alpha(x,y)\|_{(a,b)} = \|(\alpha x,\alpha y)\|_{(a,b)} = \sqrt{a^2(\alpha x)^2+b^2(\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2((ax)^2+(by)^2)} = |\alpha|\,\|(x,y)\|_{(a,b)}$

• $\|(x,y)+(z,t)\|_{(a,b)} = \|(x+z,y+t)\|_{(a,b)} = \sqrt{a^2(x+z)^2+b^2(y+t)^2}$

$\|(x,y)\|_{(a,b)}+\|(z,t)\|_{(a,b)} = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2z^2+b^2t^2}$

On a $\|(x,y)+(z,t)\| \leq \|(x,y)\|+\|(z,t)\| \Leftrightarrow \sqrt{a^2(x+z)^2+b^2(y+t)^2} \leq \sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2z^2+b^2t^2}$

$\Leftrightarrow a^2(x+z)^2+b^2(y+t)^2 \leq a^2x^2+b^2y^2+a^2z^2+b^2t^2+2\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}\,\sqrt{a^2z^2+b^2t^2}$

$\Leftrightarrow \cancel{a^2x^2}+\cancel{a^2z^2}+2a^2xz+\cancel{b^2y^2}+\cancel{b^2t^2}+2b^2yt \leq \cancel{a^2x^2}+\cancel{b^2y^2}+\cancel{a^2z^2}+\cancel{b^2t^2}+2\sqrt{a^4x^2z^2+a^2b^2x^2t^2+a^2b^2y^2z^2+b^4t^2y^2}$

$\Leftrightarrow a^2xz+b^2yt \leq \sqrt{a^4x^2z^2+a^2b^2x^2t^2+a^2b^2y^2z^2+b^4t^2y^2}$ (*)

Remarque : D'après la définition de l'application $\|\cdot\|_{(a,b)}$:

$x\geq 0$, $y\geq 0$; $z\geq 0$; $t\geq 0$

Ainsi (*) $\Leftrightarrow (a^2xz+b^2yt)^2 \leq a^4x^2z^2+a^2b^2x^2t^2+a^2b^2y^2z^2+b^4t^2y^2$

$\Leftrightarrow a^4x^2z^2+b^4y^2t^2+2a^2b^2xyzt \leq a^4x^2z^2+a^2b^2x^2t^2+a^2b^2y^2z^2+b^4t^2y^2$

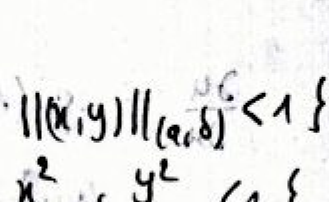
$\Leftrightarrow 0 \leq a^2b^2x^2t^2+a^2b^2y^2z^2-2a^2b^2xyzt \Leftrightarrow (abxt-abyz)^2\geq 0$

Donc l'inégalité triangulaire est vérifiée par $\|\cdot\|_{(a,b)}$ donc $\|\cdot\|_{(a,b)}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$

b/ $B((0,0),1) = \{(x,y) / \|(x-0,y-0)\|_{(a,b)} < 1\} = \{(x,y) / \|(x,y)\|_{(a,b)} < 1\}$

$= \{(x,y) / a^2x^2+b^2y^2 < 1\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{(\frac{1}{a})^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{b})^2} < 1\}$

$B((0,0),1)$ est l'intérieur de l'ellipse de rayons $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$



c/ Posons $m=\min(a,b)$ et $M=\max(a,b)$ alors

$m^2x^2 \leq a^2x^2 \leq M^2x^2$ et $m^2y^2 \leq b^2y^2 \leq M^2y^2$

d'où $m^2(x^2+y^2) \leq a^2x^2+b^2y^2 \leq M^2(x^2+y^2) \Rightarrow m\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} \leq M\sqrt{x^2+y^2}$

c.à.d $m\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_{(a,b)} \leq M\|(x,y)\|_2$

Exercice 2 a/ . $U = \mathbb{R}^2 - V$; $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$

Considérons la fonction $f(x,y) = x+y$ définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

On a $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ f(x,y) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

$C_{\mathbb{R}}^{\{0\}} =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ est un ouvert dans $\mathbb{R} \Rightarrow \{0\}$ est un fermé, Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors $V = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé $\Rightarrow U = C_{\mathbb{R}^2}^{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

b/ Rappel: Arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$

$f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$

On a : $\left|\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right| = 1 \Leftrightarrow |1-xy| = \sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2} \Leftrightarrow (1-xy)^2 = 1+x^2+y^2+x^2y^2$

$\Leftrightarrow 1+x^2y^2-2xy = 1+x^2+y^2+x^2y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$\Leftrightarrow (x,y) \notin U$

Les 2 fonctions : $(x,y) \xrightarrow{f_1} 1-xy$ et $(x,y) \xrightarrow{f_2} \sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}$ sont différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (leurs dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$)

donc $f_3 = \dfrac{f_1}{f_2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car $f_2(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Or $|f_3| = 1 \Leftrightarrow (x,y) \notin U$ donc f est différentiable sur U

et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $df_{(x,y)}(h,k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times k$

Posons $u(x,y) = \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = (1-xy)(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-1/2}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -y(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-1/2} - \dfrac{1}{2}(1-xy)(2x+2xy^2)(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-3/2}$

$= (1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-3/2}\left(-y - yx^2 - y^3 - x^2y^3 - x - xy^2 + x^2y + x^2y^3\right) = \dfrac{-x-y-xy^2-y^3}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{3/2}}$

De même $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-y-x-x^2y-x^3}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{3/2}}$ (à cause de la symétrie entre x et y)

$\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1+x^2y^2-2xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = \sqrt{\dfrac{x^2y^2+2xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2y^2+2xy}}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{1/2}}$

$df_{(x,y)}(h,k) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2y^2+2xy}\,(1+x^2+y^2+x^2y^2)}\left((-x-y-xy^2-y^3)h + (-y-x-x^2y-x^3)k\right)$

Exercice 3 : Voir Correction Janvier 2008

Exercice 4 : $f(x,y)=\sqrt{2x^4+y^4}\,\sin\left(\frac{3y}{x}\right)$

a/ $(x,y)\in D \iff 2x^4+y^4\geq 0$ et $x\neq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

b/ f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui sont continues sur D. definies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4x^3}{\sqrt{2x^4+y^4}}\sin\left(\frac{3y}{x}\right)+\sqrt{2x^4+y^4}\cdot\left(\frac{-3y}{x^2}\right)\cos\frac{3y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y^3}{\sqrt{2x^4+y^4}}\sin\left(\frac{3y}{x}\right)+\sqrt{2x^4+y^4}\cdot\frac{3}{x}\cos\frac{3y}{x}$$

c/ $$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{4x^4}{\sqrt{2x^4+y^4}}\sin\frac{3y}{x}-\frac{3y}{x}\sqrt{2x^4+y^4}\cos\frac{3y}{x}+\frac{2y^4}{\sqrt{2x^4+y^4}}\sin\left(\frac{3y}{x}\right)$$
$$+\frac{3y}{x}\sqrt{2x^4+y^4}\cos\frac{3y}{x}=2\frac{(2x^4+y^4)}{\sqrt{2x^4+y^4}}\sin\left(\frac{3y}{x}\right)=2\sqrt{2x^4+y^4}\sin\frac{3y}{x}=2f(x,y)$$

d/ les dérivées seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent sur D et sont continues sur D donc f est de classe C^2 sur D

e/ On dérive l'égalité $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2f(x,y)$ par rapport à x et par rapport à y et on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad (I)$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad (II)$$

d'où $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

et $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

On fait la somme membre à membre et on obtient :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f(x,y)$$

Exercice $p \in \mathbb{N}$; $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a/ les 3 fonctions $(x,y) \xrightarrow{f_1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x \xmapsto{f_2} \sin x$; $(x,y) \xrightarrow{f_3} (x+y)^p$

sont continues respectivement ..., $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ donc $f = f_3 \times f_2 \circ f_1$

est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

b/ $|f(x,y)| = |(x+y)^p| \left|\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x+y|^p$

si $p \geq 1$ alors $\lim_{(0,0)} |x+y|^p = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

si $p = 0$ $f(x,y) = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'a pas de limite en $(0,0)$

on prend : $x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2}(n\pi - \pi/2)}$; $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$ mais

$f(x_n, y_n) = \cos n\pi = (-1)^n$ diverge

donc f est continue en $(0,0)$ si et ssi $p \geq 1$

c/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p(x+y)^{p-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)^p . \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = p(x+y)^{p-1} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x+y)^p \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d/ les 2 dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

car elles sont somme, produit, composé de fonctions conti sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

e/ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^p \sin \frac{1}{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{p-1} \sin \frac{1}{|x|} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} y^{p-1} \sin \frac{1}{|y|} = 0$

car $\left|x^{p-1} \sin \frac{1}{|x|}\right| \leq x^{p-1}$ et $\left|y^{p-1} \sin \frac{1}{|y|}\right| \leq y^{p-1}$ et $\lim_{0} x^{p-1} = 0$, $\lim_{0} y^{p-1} = 0$

f/ si f est différentiable en $(0,0)$ alors $df_{(0,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).y = 0$

et $|\varepsilon(x,y)| = \frac{|f(x,y) - f(0,0) - df_{(0,0)}(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|x+y|^p \left|\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x+y|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}$

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\frac{|x+y|^p}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^p |\cos\theta + \sin\theta|}{r} \leq r^{p-1}(|\cos\theta| + |\sin\theta|) \leq 2r^{p-1}$

$p > 1 \Rightarrow p - 1 > 0 \Rightarrow \lim_{r \to 0} 2r^{p-1} = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} \frac{|x+y|^p}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$
$\Rightarrow f$ est diff en $(0,0)$

Exercice 5 (suite) :

g/ Considérons la suite $(x_n, y_n) = (x_n, x_n)$ avec $x_n = \frac{1}{\sqrt{2}(n\pi - \frac{\pi}{2})}$

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

On a $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$ mais $\varepsilon(x_n,y_n) = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}(n\pi-\pi/2)}}{\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2(n\pi-\pi/2)^2}}} \cdot \sin(n\pi - \frac{\pi}{2})$

$$\varepsilon(x_n,y_n) = \sqrt{2}\cos(n\pi) = \sqrt{2}(-1)^n$$

n'a pas de limite

Exercice 6

a/ les fonctions $(x,y) \xrightarrow{f_1} x-y$ et $(x,y) \xrightarrow{f_2} y-x$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en particulier sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$ et $\forall (x,y) \in D$: $f_2 \neq 0$, De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ donc

$$g = \frac{f\circ f_1 - f \circ f_2}{f_1} \text{ est continue sur } D$$

b/ Soient x, y de $\mathbb{R}$. Supposons $x > y$ alors $x-y > 0$ et $y-x < 0$

. f continue sur $[0, x-y]$ dérivable sur $]0, x-y[$: $\exists\ 0 < \theta < 1$ tel que

$$f(x-y) = f(0) + (x-y)\, f'(\theta(x-y)) \quad (1)$$

. f continue sur $[y-x, 0]$, dérivable sur $]y-x, 0[$: $\exists\ 0 < \theta' < 1$ tel que

$$f(0) = f(y-x) + (x-y)\, f'(\theta'(y-x)) \quad (2)$$

(1) + (2) : $f(x-y) + f(0) = f(0) + f(y-x) + (x-y) f'(\theta(x-y)) + (x-y) f'(\theta'(y-x))$

$$g(x,y) = \frac{f(x-y) - f(y-x)}{x-y} = f'(\theta(x-y)) + f'(\theta'(y-x))$$

On pose $X = x-y$ alors $(x,y) \to (a,a) \iff X \to 0$

d'où $\lim\limits_{(a,a)} g(x,y) = \lim\limits_{X\to 0} f'(\theta X) + f'(-\theta' X) = 2f'(0)$ car f' est continue en 0 d'où $\lim\limits_{(a,a)} g(x,y) = 2f'(0) = g(a,a)$

c/ $$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial f}{\partial x}(y-x)\right)(x-y) - (f(x-y) - f(y-x))}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x-y) - \frac{\partial f}{\partial y}(y-x)\right)(x-y) + f(x-y) - f(y-x))}{(x-y)^2}$$

d/ $$\frac{g(x,a)-g(a,a)}{x-a} = \left(\frac{f(x-a)-f(a-x)}{x-a} - 2f'(0)\right)\frac{1}{x-a}$$

$a-x \quad 0 \quad x-a$

Supposons $x>a$ alors $x-a>0$ et $a-x<0$

Formule de Taylor appliquée à f sur chacun des intervalles $[0,x-a]$ et $[a-x,0]$

$$f(x-a) = f(0) + (x-a)f'(0) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\theta(x-a)) \qquad 0<\theta<1$$

$$f(0) = f(a-x) + (x-a)f'(a-x) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\theta'(a-x)) \qquad 0<\theta'<1$$

$$f(x-a) = f(a-x) + (x-a)\left(f'(0)+f'(a-x)\right) + \frac{(x-a)^2}{2}\left(f''(\theta(x-a)) + f''(\theta'(a-x))\right)$$

$$\frac{f(x-a)-f(a-x)}{x-a} - 2f'(0) = f'(0)+f'(a-x) - 2f'(0) + \frac{x-a}{2}\left(f''(\theta(x-a))+f''(\theta'(a-x))\right)$$

$$= f'(a-x) - f'(0) + \frac{x-a}{2}\left(f''(\theta(x-a)) + f''(\theta'(a-x))\right)$$

$$= (a-x)f''(\theta''(a-x)) + \frac{x-a}{2}\left(f''(\theta(x-a)) + f''(\theta'(a-x))\right)$$

d'où $$\frac{g(x-a)-g(a,a)}{x-a} = -f''(\theta''(a-x)) + \frac{1}{2}\left(f''(\theta(x-a)) + f''(\theta'(a-x))\right)$$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc f'' est continue en $(0,0)$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x-a)-g(a,a)}{x-a} = -f''(0) + \frac{1}{2}\left(f''(0)+f''(0)\right) = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = 0$$

De même, on montre que $\frac{\partial g}{\partial y}(a,a) = 0$

Institut la centrale. Exercices facultatifs (suite)

Exercice 7 $F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a/ $\|F(x,y)\|_\infty = \sup\left(\left|\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}\right|, \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\right) \leq \sup\left(\frac{(x^2+y^2)^{5/2}}{x^2+y^2}, \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}\right)$

d'où $\|F(x,y)\|_\infty \leq \sup\left((x^2+y^2)^{3/2}, (x^2+y^2)\right) = \sup\left(\|(x,y)\|_2^3 ; \|(x,y)\|_2^2\right)$

En effet : $x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow |x| \leq (x^2+y^2)^{1/2} \Rightarrow |x|^3 \leq (x^2+y^2)^{3/2}$
$y^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} |x^3y^2| \leq (x^2+y^2)^{5/2} \\ x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2 \end{cases}$

• F est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car les composantes $f_1(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (rapport de fcts continues)

De plus $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = (0,0) = F(0,0)$; car $\lim_{(0,0)} \sup\left(\|(x,y)\|_2^2, \|(x,y)\|_2^3\right) = (0,0)$

d'où F est continue en $(0,0)$. et par suite F est continue sur $\mathbb{R}^2$

b/ $J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x^5y+2x^3y^3-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x^3+2xy^2-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2y^3-2yx^2-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$

c/ $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x,0)-f_1(0,0)}{x-0} = 0$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \lim$

pour $y = x$ on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4+3x^4-2x^6}{4x^4} = \lim_0 \frac{6-2x}{4} = 3/2$

et pour $y = 2x$ on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{15x^4-8x^6}{25x^4} = \lim_0 \frac{15-8x^2}{25} = \frac{3}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'a pas de limite en $(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$

donc F n'est pas de classe C^1

Exercice 8 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x,y,z) = (x+y^2, xy^2z)$

a/ les composantes $f_1(x,y,z) = x+y^2$ et $f_2(x,y,z) = xy^2z$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 0$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = y^2z$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = 2xyz$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = xy^2$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^3$ donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$

b/ $M_J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2 z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}$

Exercice 9 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x,y,z) = \left((x+y+z)\ln(xy) \,,\, \frac{x}{y} e^{-z}\right)$

a/ f est définie si $xy > 0$ et $y \neq 0$ càd $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$

$D_f = (]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times \mathbb{R}) \cup (]-\infty,0[\times]-\infty,0[\times \mathbb{R})$

b/ $M_J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln xy + \frac{x+y+z}{x} & \ln xy + \frac{x+y+z}{y} & 0 \\ \frac{e^{-z}}{y} & -\frac{x}{y^2} e^{-z} & -\frac{x}{y} e^{-z} \end{pmatrix}$

Exercice 10 Voir Examen 2010

Exercice 11 Voir Exercice proposé

Exercice 12 a/ Rappel Inégalité de Schwarz

$\forall\, a_i, b_i \in \mathbb{R}$: $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$

Prenons : $\forall\, 1 \leq i \leq n$ $b_i = 1$ alors $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n 1\right)$

càd $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n.\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$

b/ f admet un point stationnaire au point (x,y) si $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

càd $\sum_{i=1}^n 2a_i(xa_i + y - b_i) = 0$ (1) et $\sum_{i=1}^n 2(xa_i + y - b_i) = 0$ (2)

$$\begin{matrix} -n \\ \sum a_i \end{matrix} \begin{cases} x\sum_{i=1}^n a_i^2 + y\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = 0 \\ x\sum a_i + ny - \sum_{i=1}^n b_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(\sum b_i)(\sum a_i - n)}{(\sum a_i)^2 - n\sum a_i^2} \\ y = \dfrac{(\sum a_i)(\sum b_i) - \sum b_i \sum a_i^2}{(\sum a_i)^2 - n\sum a_i^2} \end{cases}$$

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sum 2a_i^2 = 2\sum a_i^2$ $s = \sum_{i=1}^n 2a_i = 2\sum a_i$ $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^n 2 = 2n$

$D = rt - s^2 = 4\left(n\sum a_i^2 - (\sum a_i)^2\right) > 0$ (d'après la question a/)

et comme $r > 0$ alors f admet un minimum en ce point.